УДК 330.3+332.012

# ВЫВОД ЭКОНОМИЧЕСКИХ МАКРОСИСТЕМ НА МАГИСТРАЛЬНЫЙ ПУТЬ РАЗВИТИЯ

А.С. Мараховский, Е.Л. Торопцев

Ставропольский государственный аграрный университет
E-mail: Marahov@yandex.ru

*Рассматривается задача вывода произвольной макроэкономической системы на магистральный путь развития по траектории, которая с точки зрения некоторого квадратичного критерия качества приближает пропорции валового внутреннего продукта к оптимальным пропорциям. При этом оптимальными пропорциями валового внутреннего продукта считаются пропорции магистральной (эталонной) экономической системы.*

Впервые П. Самуэлсон предложил именовать магистралью всякую сбалансированную траекторию с максимальным темпом роста. В связи с этим возникла бытовая трактовка достижения экономических целей оптимальным образом. А именно: для того, чтобы оптимальным путем «добраться» из начального пункта $X_0$ в конечный пункт $X_k$ следует быстрее выбраться на магистраль (улучшенную дорогу для скоростного движения), «двигаться» по ней возможно дольше и лишь в конце свернуть в пункт назначения.

Естественно, что перевод экономической системы на магистральные темпы развития так же, как и переход к заданной цели, требует внешних усилий в виде инвестиционных вложений, причем возможно не разовых, а распределенных во времени. Для сложных многосекторных экономических систем от инвестора требуется еще и знание, в каких пропорциях инвестиции должны быть распределены в подсистемах или отраслях. Ответы на такие вопросы можно получить, рассматривая управление экономическими системами с позиций, развитых в теории оптимального управления и вариационного исчисления, теории систем и системного анализа.

Любое управление предполагает наличие объекта управления (управляемой системы), субъекта управления (управляющей системы) и внешней среды. Основное назначение управляющей системы – поддерживать установленный и по каким-либо свойствам признанный нормальным режим работы объекта управления, а также обеспечивать нормальное функционирование отдельных элементов объекта управления в условиях воздействия внешней среды. Объект управления во взаимодействии с управляющей системой образует замкнутую систему управления. Связь, с помощью которой управляющая система воздействует на объект управления, называется *обратной связью*. В теории автоматического регулирования функцию управления называют программой управления.

В экономических задачах программа управления соответствует принятию решения на перспективу. Синтез оптимальных управлений в случае отклонения состояния системы от планового значения дает оптимальное решение и при новом ее состоянии. Изложенная ниже методика синтеза оптимальных управлений позволяет выводить динамические макросистемы на магистральные темпы функционирования.

**Постановка задачи.** Имеем две динамические макросистемы, одну из которых будим называть *развивающейся*,

$$\dot{X}(t) = B^{-1}(E - A - K)X(t) + B^{-1}U(t)\ X(0) = X0, \quad (1)$$

а вторую *эталонной* системой следующего вида:

$$\dot{X}_m(t) = G_m X_m(t), \quad X_m(0) = X_m 0, \quad (2)$$

здесь $X(t)$ и $X_m(t)$ – уровень валового внутреннего продукта развивающейся и магистральной системы; $A$ – матрица прямых материальных затрат; $B$ – матрица приростных фондоемкостей; $K$ – матрица конечного потребления; $E$ – единичная матрица; $U(t)$ – внешнее инвестиционное воздействие; $G_m$ – матрица замкнутой магистральной системы.

Системы дифференциальных уравнений (1) и (2) записаны в нормальной форме Коши и представляют собой балансовые модели макроэкономических систем В.В. Леонтьева [1]. Моделирование и анализ динамических свойств таких систем, основанный на контроле за расположением собственных чисел на комплексной плоскости, был проведен Е.Л. Торопцевым [2].

Особенности развития макроэкономики России отражаются в системе национальных счетов (СНС). Неотъемлемой частью СНС являются таблицы «Затраты-выпуск» [3], которые содержат подробные характеристики производства и использования товаров и услуг, а также доходов, формирующихся в процессе производства. Симметричная таблица «Затраты-выпуск», более известная среди российских пользователей статической информации как межотраслевой баланс производства и распределения товаров и услуг, устанавливает производственные связи типа «отрасль-отрасль». В таблицах собрана информация по 22-м отраслям.

К сожалению, экономические параметры, предоставляемые ежегодным статистическим сборником [3], можно использовать только в статических моделях; данная работа посвящена изучению динамических моделей. В качестве примера будут рассмотрены малоразмерные трехотраслевые модели макросистем, которые получены путем агрегирования. В качестве статических параметров для этих систем (матрицы $A$ и $K$) использовались данные симметричной таблицы «Затраты-выпуск». Параметры системы, отвечающие за динамические характеристики модели (матрица $B$), а также начальные условия ($X0$ и $X_m0$), подобраны на основе проведения множественных имитационных вычислений таким образом, чтобы была возможность наглядной демонстрации переходных процессов, возникающих в макросистемах с инвестиционным воздействием. Экономические параметры моделей представлены в таблице.

На рис. 1 представлены результаты интегрирования систем (1) и (2). Магистральное развитие эталонной системы (2) отражено на графике тонкими линиями. В этой системе на всем временном интервале соблюдаются оптимальные пропорции развития, что приводит к постоянному росту валового внутреннего продукта (ВВП). Для развивающейся системы (1) внешнее инвестиционное воздействие $U(t)=0$, следствием чего является не оптимальный и не сбалансированный план формирования валовых выпусков, приводящий к угасанию одной из отраслей с течением времени.

***Таблица.*** *Экономические параметры динамической модели развивающейся системы*

| Прямые затраты ($A$) | | | Конечное потребление ($K$) | | | Приростные фондоемкости ($B$) | | | Матрица замкнутой эталонной системы ($G_m$) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,08 | 0,03 | 0,06 | 0,21 | 0 | 0 | 0,31 | 0,40 | 0,67 | −2,48 | 1,18 | 1,52 |
| 0,12 | 0,23 | 0,01 | 0 | 0,18 | 0 | 0,5 | 0,32 | 0,54 | 1,7 | −1,81 | 1,3 |
| 0,02 | 0 | 0,09 | 0 | 0 | 0,16 | 0,48 | 0,6 | 0,2 | 1,22 | 1,04 | −2,33 |

Развивающаяся система не в состоянии самостоятельно перераспределить пропорции ВВП оптимальным образом, поэтому в модели предусмотрена внешняя инвестиционная составляющая $U(t)$, пока неизвестная, но благодаря которой должен получиться результат совмещения ВВП развивающейся и эталонной системы. Из этого следует, что разность

$$Y(t)=X_m(t)-X(t) \quad (3)$$

стремиться к нулю при $t=\infty$, т. е. $Y(\infty)=0$. Для практических целей необходимо синтезировать такое внешнее управление $U(t)$, которое бы за конечное время $t_k$ приводило разность $Y(t_k)$ к нулю. При этом, начиная со времени $t_k$, уровень ВВП развивающейся системы должен совпадать с уровнем эталонной системы.

**Решение задачи.** Продифференцируем ур. (3) по $t$ и получим:

$$\dot{Y}(t)=\dot{X}_m(t)-\dot{X}(t). \quad (4)$$

Принимая во внимание (1) и (2), перепишем (4) в следующем виде:

$$\dot{Y}(t)=G_m X_m(t)-B^{-1}(E-A-K)X(t)-B^{-1}U(t), \quad (5)$$

учитывая, что $X_m(t)=Y(t)+X(t)$, получим:

$$\dot{Y}(t)=G_m Y(t)+$$
$$+(G_m-B^{-1}(E-A-K))X(t)-B^{-1}U(t). \quad (6)$$

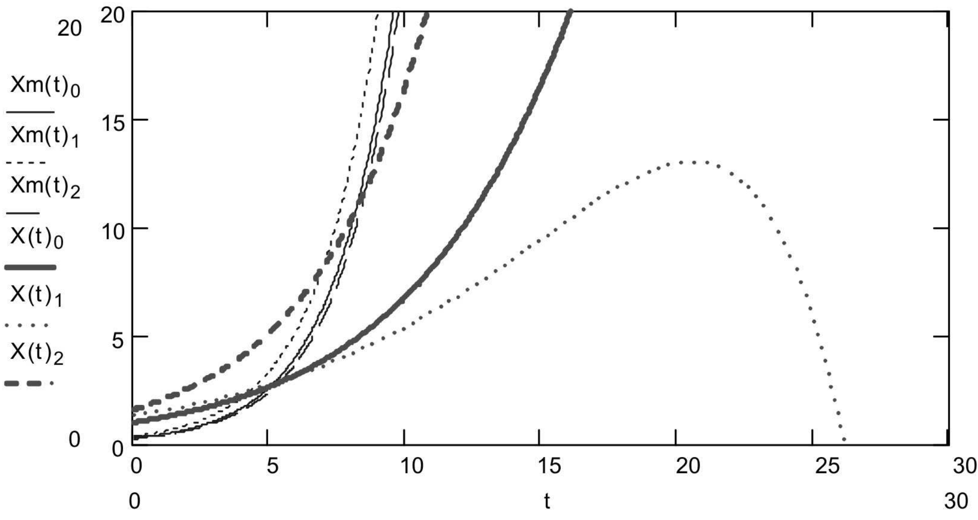



***Рис. 1.*** *Динамика ВВП магистральной и развивающейся системы без инвестиционного воздействия*

В данном случае $X(t)$ совместно с $U(t)$ являются управляющими функциями, с помощью которых систему (6) необходимо перевести в нулевое состояние. Определение $U(t)$ должно проводится в два этапа. На первом этапе необходимо приравнять $U(t)$ к нулю и, используя только управление от вектор-функции $X(t)$, привести систему (6) в устойчивое состояние. На втором этапе, зная траектории управления, можно определить $U(t)$, что будет показано ниже.

Возможность перевода системы в нулевое состояние называется *управляемостью* или достижимостью. Для системы (6) матрица управляемости имеет вид [4]:

$$\Gamma_c[\alpha,\beta]=[\beta\ \alpha\beta\ \alpha^2\beta\ \dots\ \alpha^{n-1}\beta], \qquad (7)$$

где $\alpha=G_m$, $\beta=G_m-B^{-1}(E-A-K)$.

Модель (6) полностью управляема тогда и только тогда, когда $\Gamma_c$ имеет максимальный строчный ранг. Если система не полностью управляема (ранг$(\Gamma_c)=k<n$), ее можно разложить на управляемую и полностью неуправляемую подсистемы. В этом случае существует преобразование подобия $T$, такое что $\overline{Y}=T^{-1}Y$, тогда:

$$\overline{A}=T^{-1}G_mT;\quad \overline{B}=T^{-1}(G_m-B^{-1}(E-A-K)), \qquad (8)$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{A}_c & \overline{A}_{12}\\ 0 & \overline{A}_{nc}\end{bmatrix};\quad \overline{B}=\begin{bmatrix}\overline{B}_c\\ 0\end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где $\overline{A}_c$ имеет размерность $k$, и система $(\overline{A}_c,\overline{B}_c)$ полностью управляема.

Управляемое подпространство модели (6) представляет собой любую возможную линейную комбинацию состояний $\overline{Y}_c$. Устойчивость этого подпространства определяется расположением собственных значений $\overline{A}_c$. Подпространство модели, не поддающееся управлению, состоит из всех состояний, получаемых с помощью любой возможной линейной комбинации состояний $\overline{Y}_{nc}$. Устойчивость этого подпространства определяется расположением собственных значений $\overline{A}_{nc}$. Модель (6) стабилизируема, если ее подпространство неуправляемых состояний устойчиво.

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что модель (6) полностью управляема, тогда имеется возможность определения такого линейного квадратичного регулятора $Z$, который удерживал бы выходы системы вблизи нулевого положения.

Для замыкания системы введем следующее линейное преобразование:

$$X(t)=ZY(t). \qquad (10)$$

Предположив, что $Z$ такой регулятор, который учитывает внешнее воздействие на систему (6) со стороны $X(t)$ и $U(t)$, получим замкнутую систему:

$$\dot{Y}(t)=(G_m+(G_m-B^{-1}(E-A-K))Z)Y(t). \qquad (11)$$

Для данной модели с желаемым набором собственных чисел замкнутого контура можно вычислить набор постоянных коэффициентов усиления, такой, что обратная связь по состоянию через постоянные коэффициенты усиления дает заданное расположение собственных чисел замкнутого контура на комплексной плоскости.

С практической точки зрения реализация такого регулятора потребовала бы измерения величины каждой переменной состояния. Однако из-за экономических ограничений не всегда имеется возможность провести фактические измерения всех переменных состояния системы, в частности, ВВП отдельных отраслей. Это требует альтернативы фактическим измерениям и введения так называемых *наблюдателей* [4], иногда называемых также виртуальными датчиками, фильтрами или расчетными данными. Цель наблюдателя состоит в том, чтобы вывести величину неизмеренной переменной состояния через другие переменные состояния, связанные с ней, и которые можно измерить.

Наблюдатели имеют много общего с системами управления:

- они являются динамическими системами;
- с ними можно работать как в частотной, так и во временной области;
- они могут быть проанализированы, синтезированы и спроектированы;
- они имеют свойства такие, как устойчивость в переходных процессах и чувствительность;
- эти свойства определяются полюсами и нулями их чувствительностей.

В случае отсутствия полной информации о структуре ВВП эталонной и развивающейся системы линейный наблюдатель для модели (11) будит следующим:

$$\dot{\tilde{Y}}(t)=(G_m+(G_m-B^{-1}(E-A-K))Z)\tilde{Y}(t)+$$
$$+J(CY(t)-C\tilde{Y}(t)), \qquad (12)$$

где матрица $J$ называется усилением наблюдателя, $C$ – матрица измерений, а $\tilde{Y}(t)$ – восстановленным состоянием. Заметим, что в частном случае, когда $J$=0, наблюдатель превращается в модель замкнутой системы (11). Именно этот случай нас будет интересовать в дальнейшем.

Один из подходов к синтезу регуляторов с наперед заданными значениями собственных чисел замкнутого контура состоит в том, чтобы поместить динамические свойства системы в так называемый стоимостной функционал, который затем минимизируется количественно. Этот подход называется оптимальным управлением, так как оптимизируется функционал качества. Оптимизация переносит техническую задачу с непосредственного проектирования регулятора на проектирование критерия качества, из которого регулятор получается автоматически.

Определим $Z$ таким образом, чтобы использование его в цепи положительной обратной связи (10) минимизировало квадратичный функционал:

$$J(X)=\int_0^\infty (Y^T QY+X^T RX)dt, \qquad (13)$$

здесь $Q$ – неотрицательно определенная, а $R$ – положительно определенная диагональная матрица весовых коэффициентов. Весовые матрицы $Q$ и $R$ определяют соотношение между качеством регулирования (как быстро процесс сходится к нулю) и затратами на управление. Функционал (13) является стандартным вспомогательным критерием по которому минимизируются отклонения между магистралью и фактической динамикой ВВП развивающейся системы.

Матрица $Z$ определяется путем численного решения уравнения Риккати [4, 5]:

$$ZG_m+G_m^T Z-Z(G_m-B^{-1}(E-A-K))R^{-1}\times$$
$$\times(G_m-B^{-1}(E-A-K))^T Z+Q=0. \qquad (14)$$

Вычислив $Z$ и проинтегрировав систему (11), запишем ее решение в виде:

$$Y(t)=e^{(G_m+(G_m-B^{-1}(E-A-K))Z)t}\,Y(0). \qquad (15)$$

Все собственные числа матрицы строго отрицательны, следовательно, процесс сближения траекторий развивающейся и эталонной системы является устойчивым и с течением времени $Y(t)$ стремится к нулю. Данный результат отражен на рис. 2.

Определение функциональной зависимости $Y(t)$, которая оптимальна с точки зрения минимума функционала (13), позволяет вычислить траектории сближения развивающейся и эталонной системы по формуле:

$$X_{new}(t)=X_m(t)-Y(t). \qquad (16)$$

Результат вычисления (16) показан на рис. 3. Верхний пучок траекторий приближается к эталонному пучку до полного совпадения и продолжает свое развитие уже в магистральном режиме назначенных траекторий.

Дальнейшее изложение посвящено количественной оценке инвестиционного воздействия

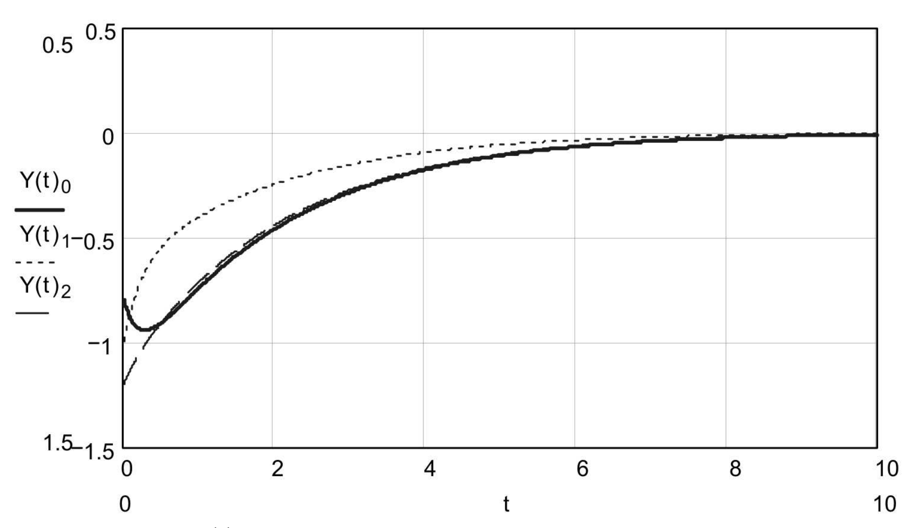



***Рис. 2.*** *Динамика Y(t)*

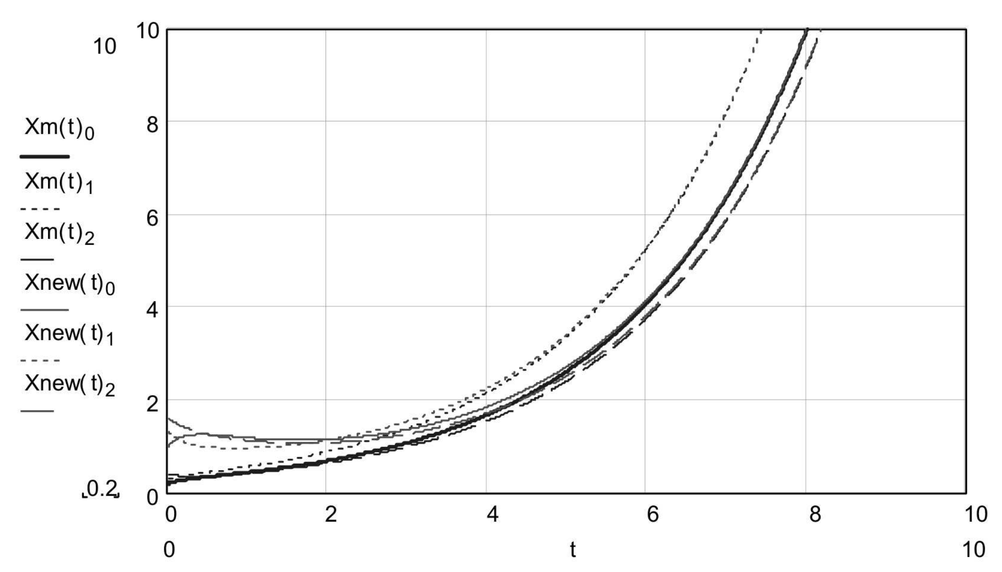



***Рис. 3.*** *Сближение траекторий развивающейся и эталонной системы*

$U(t)$ на оптимально развивающуюся систему (16), траектории которой со временем приближаются к магистральным траекториям.

Предположим, что инвестиционное воздействие на развивающуюся систему должно быть пропорционально $X_{new}(t)$, тогда:

$$U(t)=-MX_{new}(t), \quad (17)$$

где $M$ – матрица инвестиционного воздействия, замыкающая систему (1) отрицательной обратной связью.

Синтез $M$ с использованием интегральных квадратичных оценок затруднен ввиду неустойчивости процесса расширения развивающейся экономической системы (1). Для этой системы квадратичный интеграл качества вида (13) будет расходящимся, что следует из требования постоянного расширения ВВП, преследующего уровень магистральной траектории. Поэтому определение $M$ проводилось по методу наименьших квадратов, минимизирующих функционал $F$ следующего вида:

$$F(M)=\sum_t (e^{B^{-1}(E-A-K-M)t} X_{new}(0)-X_{new}(t))^2. \quad (18)$$

В результате численной минимизации $F(M)$ была получена матрица $M$, коэффициенты которой характеризуют необходимый уровень инвестиционных вложений на единицу ВВП:

$$M=\begin{pmatrix} 8,56 & -3,85 & -4,67 \\ -5,93 & -2,34 & 8,49 \\ -3,68 & -3,16 & 7,75 \end{pmatrix},$$ погрешность аппроксимации $F(M)$=0,000005.

Численная минимизация функционала (18) проводилась с использованием квазиньтоновского метода программно-математической среды MatCad. Проверка гипотезы о нормальности распределения остатков была подтверждена на жестком 10 %-ном уровне по $\chi^2$-критерию и критерию Колмогорова-Смирнова.

Наличие положительных и отрицательных коэффициентов в $M$ свидетельствует о двунаправленности потока финансовых средств как в систему, так и из нее. Сравнительно большая величина этих коэффициентов говорит о больших финансовых потоках средств, необходимых для поддержания магистрального развития системы.

Коэффициенты матрицы $M$ позволяют определить временной график инвестиционных процессов $U(t)$, рис. 4. Отрицательные значения векторфункции $U(t)$ следует рассматривать как внешний инвестиционный поток средств, необходимый данной системе для магистрального функционирования. Положительные значения $U(t)$ характеризуют экспортный финансовый поток, направленный из системы.

Для данной макросистемы, взятой в качестве примера, на первоначальном этапе необходимы вложения в отрасль $U_0$; при этом система будет работать в автономном режиме (без инвестиций) приблизительно 1 год. Далее потребуются инвестиции в отрасль $U_1$, а затем почти одновременно для $U_0$ и $U_2$. Причем эти инвестиции должны постоянно увеличиваться, чего требует выбранное магистральное направление развития и соответствующие ему пропорции ВВП.

В реальных экономических системах, например, макросистеме РФ, возможность полной управляемости в рамках балансовой модели связана со значениями коэффициентов матрицы $B$ приростных фондоемкостей. Если $B$ вырождена, что имеет место в случае наличия всего двух фондосоздающих отраслей («Строительство» и «Машиностроение») из 22-х, то возможности по управлению экономической динамикой ограничены. Эти ограничения связаны с малым количеством составляющих движения, участвующих в переходном процессе. Для таких систем синтез матрицы $M$ с использованием функционала (18) будет затруднен, что связано с трудностью обра-

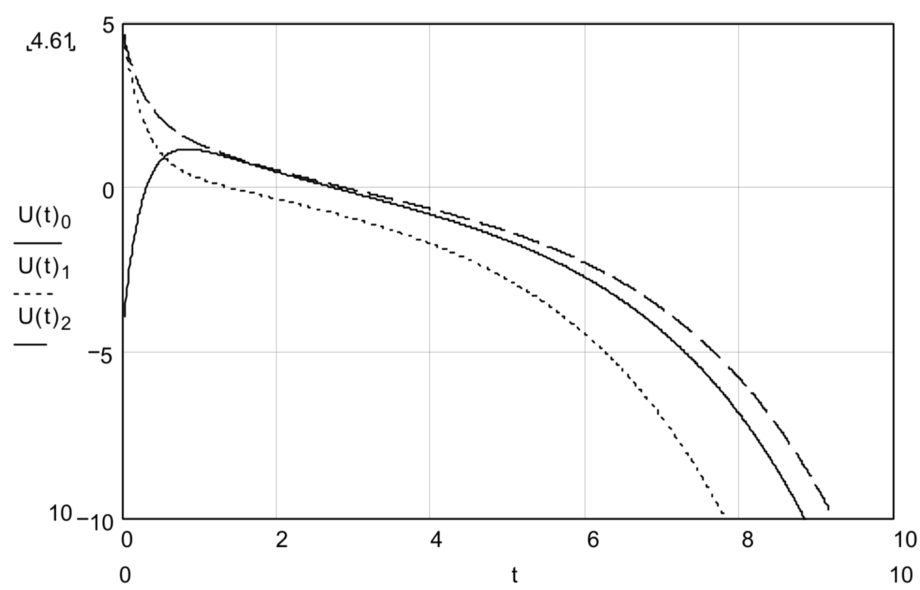



***Рис. 4.*** *Временной график инвестиционных процессов*

щения вырожденной матрицы *B*. Поэтому реальную частично-управляемую систему необходимо разбить на полностью управляемую и неуправляемую части. При этом закон инвестиционного управления и коэффициенты матрицы *M* необходимо синтезировать в полностью управляемой части системы.

Возможность определения коэффициентов матрицы *M* в замкнутой модели развивающейся системы (1) свидетельствует о необходимости изменений в экономических параметрах модели для достижения поставленных целей магистрального функционирования, так как без этой матрицы и соответственно без инвестиционного воздействия система развивается несбалансированно. Сбалансированность в системе может быть достигнута путем соответствующих изменений коэффициентов матриц прямых затрат и приростных фондоемкостей, а также параметров, отвечающих за конечное потребление, при этом матрица замкнутой системы (1) должна оставаться неизменной. В этой матрице содержится информация о темпах роста и пропорциях магистрального развития каждой отрасли макросистемы. Изменение экономических параметров динамических систем непременно скажется на уровнях финансово-денежных потоков, циркулирующих внутри системы и за ее пределами, но эти изменения можно контролировать с помощью математического аппарата балансовых уравнений.

Прогнозирование и поддержание соответствующих уровней экспортиртно-импортных и инвестиционных потоков макросистем, проведение вычислительных экспериментов и выработка практических рекомендаций входит в компетенцию департамента макроэкономического прогнозирования Министерства экономического развития и торговли РФ. Определение конкретных сумм инвестиционных потоков связано с дискретизацией непрерывных моделей динамических систем. Возникающие при этом колебания и отклонения от заданных траекторий необходимо будет компенсировать дополнительными воздействиями.

### Вывод

Предложенный математический аппарат проектирования оптимальных инвестиционных воздействий на макроэкономические системы позволяет создавать и поддерживать магистральные темпы развития этих систем, проводить анализ и оптимизацию временных инвестиционных процессов в фазовом пространстве отраслей, предоставляя при этом соответствующую информацию для инвесторов и лиц, принимающих решения в области макроэкономического прогнозирования, управления инвестициями и оптимального развития макроэкономики.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Леонтьев В. Межотраслевая экономика. – М.: Экономика, 1997. – 478 с.
2. Торопцев Е.Л. Моделирование процессов экономической динамики макросистем. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2001. – 235 с.
3. Соколин В.Л. Система таблиц «Затраты выпуск» России за 2000 год: Стат. сб. / Госкомстат России. – М., 2003. – 116 с.
4. Гудвин Г.К. Проектирование систем управления. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.
5. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.


*Поступила 27.02.2006 г.*